

Übungen zur Analysis 2

Blatt 2

Abgabe und Besprechung, Donnerstag, den 23.10.2008

Aufgabe 7

(4 Punkte)

(a) Es sei $f \in C^n(\mathbb{R})$ mit $\lim_{x \rightarrow \infty} f^{(n)}(x) = s$. Zeige: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n!f(x)}{x^n} = s$.

(b) Berechne $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(x^2) - \sin^2 x}{\arcsin^4 x}$.

Hinweis

Benutze für (b) die ersten Glieder der zugehörigen Taylorreihen.

Aufgabe 8

(4 Punkte)

Zeige, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x \leq 0 \\ 1 & \text{falls } x > 0 \end{cases},$$

keine Stammfunktion besitzt.

Aufgabe 9

(3 Punkte)

Beweise oder widerlege:

Es sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion, so dass $|f|$ Riemann-integrierbar ist. Dann ist auch f Riemann-integrierbar.

Hinweis

Betrachte eine Funktion f analog zur Dirichletfunktion mit $f(x) = -1$ (statt 0) für $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Aufgabe 10

(4 Punkte)

Berechne Stammfunktionen für die folgenden Funktionen auf ihrem natürlichen Definitionsbereich:

(a) $f(x) = \frac{4}{4 \cos x + 3 \sin x}$.

(b) $f(x) = \frac{1}{\sin x}$.

Hinweis

Verwende die $\tan \frac{x}{2}$ -Substitution: Zur Berechnung einer Stammfunktion von $R(\cos x, \sin x)$ bei gegebener Funktion $R(\cdot, \cdot)$ benutzt man die Substitution $t = \tan \frac{x}{2}$. Dabei gilt: $x = 2 \arctan t$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $dx = \frac{2}{1+t^2} dt$, also

$$\int R(\cos x, \sin x) dx = \int R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right) \frac{2}{1+t^2} dt \Big|_{t=\tan \frac{x}{2}}.$$

Aufgabe 11

(5 Punkte)

Berechne die folgenden unbestimmten Integrale auf ihrem natürlichen Definitionsbereich:

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \int \frac{3x^2}{x^3+1} dx. & \text{(b)} \int x^2 \log x dx. & \text{(c)} \int e^{2x} \sin x dx. \\ \text{(d)} \int \arctan(2x) dx. & \text{(e)} \int \frac{x^6+x^4+1}{x^4-1} dx. & \end{array}$$

<http://www.mathematik.uni-ulm.de/m5/mhofert/ana2/>